ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №9 (Вариант 24)

**Тема:** Интерполяционный полином Лагранжа и Ньютона

**Задание:** Построить интерполяционный полином Лагранжа и Ньютона

**Теория:**

**Полином Лагранжа**

Пусть на отрезке [a; b] дано (n+1) различных значений аргумента Інтерполяційна формула Лагранжа (Інтерполяційна формула Лагранжа) для которых известны соответствующие значения функции Інтерполяційна формула Лагранжа. Необходимо построить полином, степень которого не превышает n, и который в узлах интерполяции Інтерполяційна формула Лагранжа принимает те же значения, что и функция Інтерполяційна формула Лагранжа, то естьІнтерполяційний поліном Лагранжа. Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить полином Інтерполяційна формула Лагранжа в виде линейной комбинации функции Інтерполяційна формула Лагранжа в узлах интерполяции:

Інтерполяційна формула Лагранжа

где Інтерполяційна формула Лагранжа — полином степени n, для которого выполняется условие:

Інтерполяційна формула Лагранжа

Учтя (1) полином Інтерполяційна формула Лагранжа можно записать в следующем виде:

Інтерполяційна формула Лагранжа

где Інтерполяційна формула Лагранжа постоянный коэффициент. Значение данного коэффициента можно найти при Інтерполяційна формула Лагранжа.

Інтерполяційна формула Лагранжа

Из последнего соотношения определяем Інтерполяційна формула Лагранжа и подставляем его в формулу (2):

Інтерполяційна формула Лагранжа

Інтерполяційна формула Лагранжа

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа будет иметь следующий вид:

Інтерполяційна формула Лагранжа

**Решение:**

Для заданных точек на плоскости находим интерполяционный полином.

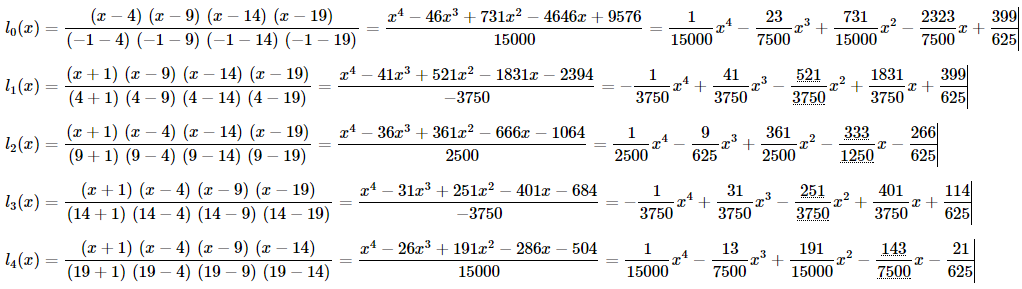
|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -1 | 4 | 9 | 14 | 19 |
| Y | -1 | 5 | 2 | -6 | 13 |

У нас есть 5 точeк, степень полинома не больше, чем 4.

При помощи y координат составим запись полинома Лагранжа.



При помощи x координат запишем и упростим базисные полиномы Лагранжа



Подставляем базисные полиномы Лагранжа в формулу интерполяционного полинома и суммируем члены с одинаковыми степенными показателями (результат записан в рамочке).





L(x) =

**Полином Ньютона**

Узлы называются равностоящими, если xi+1 – xi = ∆xi = h = const ( i = 0,𝑛-1 )

Конечными разностями функции y = f(x) называются разности вида:

∆yi = yi+1 – yi – конечные разности И – порядка (1)

∆2 yi = yi+1 – ∆yi - конечные разности II - порядка

…

∆k yi = ∆k-1yi+1 –∆k-1yi – конечная разность k-того порядка (табл.1).

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | y | ∆y | ∆2y | ∆3y | ∆4y |
| х0 | у0 | ∆у0 | ∆2y0 | ∆3y0 | ∆4y0 |
| х1 | у1 |
| ∆у1 |
| х2 | у2 | ∆2y1 |
| ∆у2 | ∆3y1 |
| х3 | у3 | ∆2y2 |
| ∆у3 |
| х4 | у4 |

Таблиця 1

Первая интерполяционная формула Ньютона имеет вид:

y(x)= Pn(x)= y0+q∆y0+ q(q−1)2!∆2y0+ ...+ q(q−1)…(q−n+1)n!∆ny0 , (2)

де q= x− x0h

Заметим, что в формуле используется верхний наклонный строка таблицы разностей (∆y0,∆2y0,∆3y0,∆4y0 ).

Rn(x)= hn+1q(q−1)…(q−n)(n−1)!f(n+1)′(⅀), (3)

где ⅀ некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы xi (i = 0,n ) и точку x.

Число n желательно выбрать так, чтобы разности ∆ny были практически постоянными.

Формула (2) используется для интерполяции и экстраполяции в точке х0, близких к началу таблицы.

**Решение:**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | -1 | 4 | 9 | 14 | 19 |
| Y | -1 | 5 | 2 | -6 | 13 |

f10 = 5 + 1 / 4 + 1 = 1.2

f11 = 2 - 5 / 9 - 4 = -0.6

f12 = -6 - 2 / 14 - 9 = -1.6

f13 = 13 + 6 / 19 - 14 = 3.8

f20 = -0.6 + 0.18 / 9 + 1 = -0.18

f21 = -1.6 + 0.1 / 14 - 4 = -0.1

f22 = 3.8 - 0.54 / 19 - 9 = 0.54

f30 = -0.1 + 0.18 / 9 + 1 = 0.54

f31 = 0.54 + 0.1 / 14 - 4 = 0.0079

f40 = 0.064 - 0.0079 / 14 + 1 = 0.0037

P(x) = y0 + f10(x – x0) + f20(x – x0)(x – x1) + f30(x – x0)(x – x1)(x – x3) + f40(x – x0)(x – x1)(x – x3)(x – x4) = - 1 + 1.2(x + 1) + ( - 0.18)(x + 1)(x - 4) + 0.54(x + 1)(x - 4)(x - 14) + 0.0037(x + 1)(x - 4)(x - 14)(x - 19) =

=

P(x) =

**Протокол решения в Scilab:**

disp('Метод интерполяционного полинома Лагранжа и Ньютона')

X=[-1 4 9 14 19]

Y=[-1 5 2 -6 13]

disp(Y,'Y=',X,'X=','Функция задана таблицей')

p1=poly([1],'x','c')

for i=1:size(X, 'c')

p1=p1\*poly([-X(j) 1],'x','c')

end

disp(p1,'Изначальная функция(омега)')

p=poly([0],'x','c')

for i=1:size(X,'c')

t=poly([1],'x','c')

for j=1:size(X,'c')

if i==j then continue end

t=t\*poly([-X(j) 1],'x','c')

end

p=p+t

end

disp(p,'Найдём производную:')

disp(X,'Найдём производную в точках')

z=horner(p, X)

disp(z,'Производные в точках соответственно')

p1=poly([0],'x','c')

for i=1:size(X,'c')

t=poly([1],'x','c')

for j=1:size(X,'c')

if i==j then continue end

t=t\*poly([-X(j) 1],'x','c')

end

p1=p1+(Y(i)/z(i))\*t

end

disp('Полином Лагранжа и Ньютона')

disp(p1)

**Вывод в консоли:**

--> disp('Метод интерполяционного полинома Лагранжа и Ньютона')

Метод интерполяционного полинома Лагранжа

--> X=[-1 4 9 14 19]

X =

-1. 4. 9. 14. 19.

--> Y=[-1 5 2 -6 13]

Y =

-1. 5. 2. -6. 13.

-->

--> disp(Y,'Y=',X,'X=','Функция задана таблицей')

Функция задана таблицей

X=

-1. 4. 9. 14. 19.

Y=

-1. 5. 2. -6. 13.

-->

--> p1=poly([1],'x','c')

p1 =

1

--> for i=1:size(X, 'c')

> p1=p1\*poly([-X(j) 1],'x','c')

> end

--> disp(p1,'Изначальная функция(омега)')

Изначальная функция(омега)

1

--> p=poly([0],'x','c')

p =

0

--> for i=1:size(X,'c')

> t=poly([1],'x','c')

> for j=1:size(X,'c')

> if i==j then continue end

> t=t\*poly([-X(j) 1],'x','c')

> end

> p=p+t

> end

t =

1

t =

-4 +x

t =

2

36 -13x +x

t =

2 3

-504 +218x -27x +x

t =

2 3 4

9576 -4646x +731x -46x +x

p =

2 3 4

9576 -4646x +731x -46x +x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-9 -8x +x

t =

2 3

126 +103x -22x +x

t =

2 3 4

-2394 -1831x +521x -41x +x

p =

2 3 4

7182 -6477x +1252x -87x +2x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-4 -3x +x

t =

2 3

56 +38x -17x +x

t =

2 3 4

-1064 -666x +361x -36x +x

p =

2 3 4

6118 -7143x +1613x -123x +3x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-4 -3x +x

t =

2 3

36 +23x -12x +x

t =

2 3 4

-684 -401x +251x -31x +x

p =

2 3 4

5434 -7544x +1864x -154x +4x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-4 -3x +x

t =

2 3

36 +23x -12x +x

t =

2 3 4

-504 -286x +191x -26x +x

p =

2 3 4

4930 -7830x +2055x -180x +5x

--> disp(p,'Найдём производную:')

Найдём производную:

2 3 4

4930 -7830x +2055x -180x +5x

-->

--> disp(X,'Найдём производную в точках')

Найдём производную в точках

-1. 4. 9. 14. 19.

--> z=horner(p, X)

z =

15000. -3750. 2500. -3750. 15000.

--> disp(z,'Производные в точках соответственно')

Производные в точках соответственно

15000. -3750. 2500. -3750. 15000.

-->

--> p1=poly([0],'x','c')

p1 =

0

--> for i=1:size(X,'c')

> t=poly([1],'x','c')

> for j=1:size(X,'c')

> if i==j then continue end

> t=t\*poly([-X(j) 1],'x','c')

> end

> p1=p1+(Y(i)/z(i))\*t

> end

t =

1

t =

-4 +x

t =

2

36 -13x +x

t =

2 3

-504 +218x -27x +x

t =

2 3 4

9576 -4646x +731x -46x +x

p1 =

2 3 4

-0.6384 +0.3097333x -0.0487333x +0.0030667x -0.0000667x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-9 -8x +x

t =

2 3

126 +103x -22x +x

t =

2 3 4

-2394 -1831x +521x -41x +x

p1 =

2 3 4

2.5536 +2.7510667x -0.7434x +0.0577333x -0.0014x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-4 -3x +x

t =

2 3

56 +38x -17x +x

t =

2 3 4

-1064 -666x +361x -36x +x

p1 =

2 3 4

1.7024 +2.2182667x -0.4546x +0.0289333x -0.0006x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-4 -3x +x

t =

2 3

36 +23x -12x +x

t =

2 3 4

-684 -401x +251x -31x +x

p1 =

2 3 4

0.608 +1.5766667x -0.053x -0.0206667x +0.001x

t =

1

t =

1 +x

t =

2

-4 -3x +x

t =

2 3

36 +23x -12x +x

t =

2 3 4

-504 -286x +191x -26x +x

p1 =

2 3 4

0.1712 +1.3288x +0.1125333x -0.0432x +0.0018667x

-->

--> disp('Полином Лагранжа и Ньютона')

Полином Лагранжа

--> disp(p1)

2 3 4

0.1712 +1.3288x +0.1125333x -0.0432x +0.0018667x

**Вывод:**

Можно заметить, что при нахождении ответов решения системы есть небольшие разбежности, потому что считая вручную используем ε = 0,001 (допускаемое приближение).

**Список используемой литературы:**

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с.